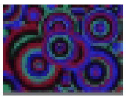
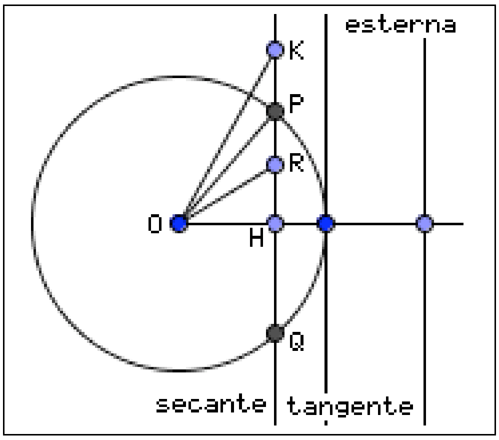


Sezione 4. – Il gioco diventa più difficile.

Nelle sezioni precedenti abbiamo esaminato alcune delle nozioni e vari risultati della Geometria Euclidea, cercando di evidenziarne le zone grigie, che derivano anche dalla consuetudine, forse giustificata, di descrivere ciò che il disegno ci suggerisce, più che di dedurre risultati dai postulati o dai teoremi precedenti. In tal modo, spesso senza che ce ne accorgiamo, introduciamo di fatto altri postulati, che non essendo evidenziati come tali, possono non diventare conoscenze condivise dalla classe e quindi essere possibili fonti di insufficienze nelle prove e negli esami.

In questa sezione parliamo per cominciare di circonferenze e cerchi, già definiti nella sezione 2. Abbiamo anche visto gli angoli al centro, i settori circolari e gli archi e abbiamo definito operazioni fra gli archi a partire da quelle fra i loro angoli al centro.
L'affermazione che ad angoli al centro congruenti corrispondano archi congruenti e settori circolari congruenti è un postulato o un teorema?

RETTE E CERCHI Dati una retta r ed un punto O fuori di essa, detto H il piede della perpendicolare da O ad r, per ogni punto P sulla retta diverso da H si ha OH < OP, perché OP è ipotenusa del triangolo rettangolo OHP.

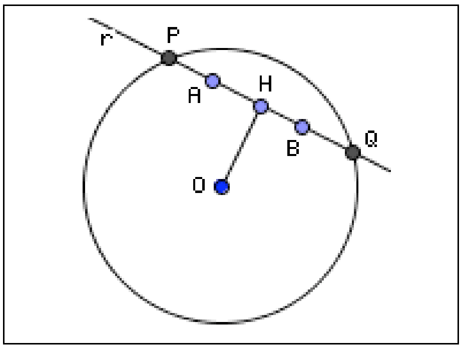


Se O è il centro di una circonferenza di raggio OH, allora l'intersezione fra il cerchio e la retta r è unicamente il punto H. La retta si dice *tangente* alla circonferenza in H.
Se il raggio è minore di OH, l'intersezione fra il cerchio e la retta è vuota e la retta si dice *esterna* alla circonferenza (e al cerchio).
Sia OH minore del raggio. Che cosa succede?

Consideriamo una delle due semirette di origine H su r. Preso su di essa un punto K tale che KH = raggio, allora OK è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con un cateto congruente al raggio, quindi K è esterno al cerchio. Sia allora $\mathfrak{R}$ l'insieme dei segmenti OR, con R appartenente alla semiretta, tali che OR sia minore o uguale al raggio. Tra questi c'è il segmento OH, quindi $\mathfrak{R}$ non è vuoto. Poiché il raggio è un maggiorante di $\mathfrak{R}$, allora $\mathfrak{R}$ ha l'estremo superiore, sia OP. Ogni punto R del segmento HP appartiene al cerchio, dato che il triangolo ORP ha in R un angolo ottuso, perché adiacente ad un angolo del triangolo rettangolo OHR; allora OR ≤ OP ≤ raggio. Per la stessa ragione, tutti i punti K della semiretta di origine P e non contenente H sono esterni al cerchio, perché OK > OP. Ma allora il raggio separa due insiemi di segmenti, quelli OR ≤ OP e

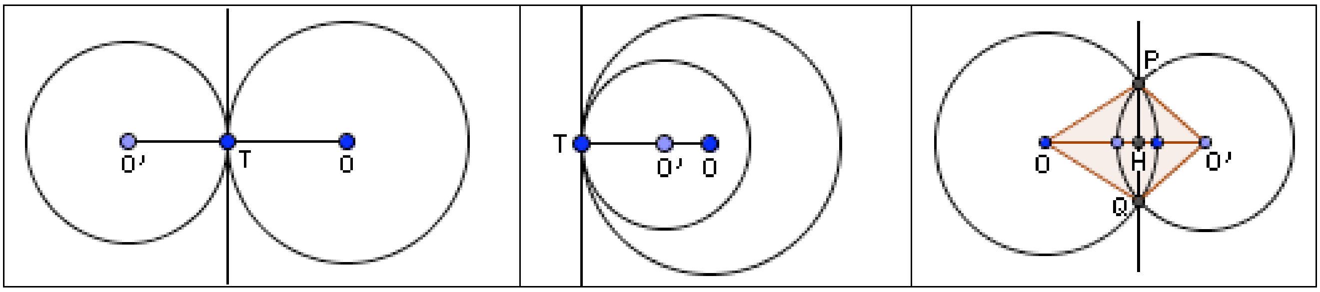
quelli OK > OP, esattamente come fa OP. La contiguità dei due insiemi fa dire che OP = raggio, quindi P appartiene alla circonferenza.
Nell'altra semiretta c'è un altro punto sulla circonferenza, quindi la retta interseca la circonferenza in due punti P, Q ed il cerchio nel segmento PQ.
La retta si dice in questo caso *secante* della circonferenza.

Ne segue che il cerchio è un insieme convesso.
Presi due punti A e B nel cerchio, la retta AB è secante, perché detto H il piede della perpendicolare da O ad AB, si ha OH < OB. Allora, detti P e Q i due punti d'intersezione della retta con la circonferenza, il segmento PQ è contenuto nel cerchio, quindi anche il segmento AB suo sottoinsieme lo è.



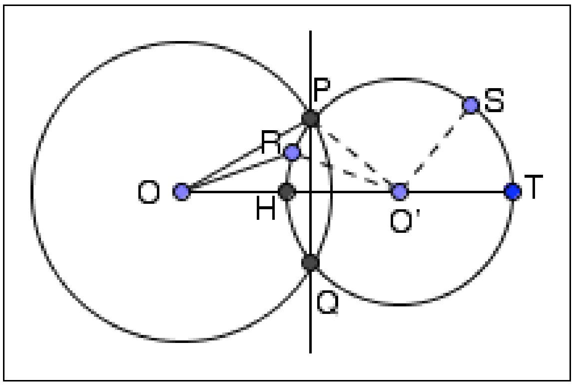
Col linguaggio appena introdotto, possiamo dire che in un poligono circoscritto ad una circonferenza, i lati sono tangenti alla circonferenza.

DUE CIRCONFERENZE Siano date due circonferenze di centri O ed O'. Se il segmento OO' è maggiore della somma dei raggi, i due cerchi hanno intersezione vuota e le circonferenze sono dette *esterne*.
Se OO' è la somma dei raggi, esiste un punto T sul segmento OO' tale che OT e TO' sono i due raggi. Allora T è il solo punto comune ai due cerchi, e le circonferenze sono *tangenti esternamente*. La perpendicolare per T al segmento OO' è tangente ad entrambe in T.



Può accadere che uno dei due cerchi sia incluso nell'altro. Ciò accade se OO' è ≤ alla differenza dei raggi. Se è minore, il cerchio col raggio più piccolo è detto *interno* all'altro. Un caso particolare si ha quando O = O' ed i raggi sono diversi: le due circonferenze sono dette *concentriche*. La figura delimitata dalle due circonferenze è detta *corona circolare*.
Se OO' è la differenza dei raggi, le due circonferenze hanno in comune un unico punto T, intersezione della semiretta di origine O e contenente O' (quest'ultimo è il centro del cerchio incluso nell'altro). Le due circonferenze sono dette *tangenti internamente*, e la perpendicolare per T ad OO' è tangente ad entrambe.

Il caso in cui OO' è compreso tra la somma e la differenza dei raggi porta i due cerchi ad avere una intersezione non ridotta ad un punto e nessuno è incluso nell'altro. Le due circonferenze sono dette *secanti*. Ma quanti punti hanno in comune le due circonferenze? Denotiamo con r ed r' i due raggi. Fissiamo uno dei due semipiani determinati da OO' e lavoriamo in esso. Consideriamo l'insieme $\Re$ dei punti della circonferenza di centro O' tali che OR ≤ r, nel semipiano fissato. Il punto H di intersezione tra la seconda circonferenza e OO' è tale che O'H = r' e quindi OH < r. IL punto T d'intersezione tra la seconda circonferenza e la semiretta su OO' onon contenente O è tale che OT > r, quindi $\Re$ non è vuoto e superiormente limitato. Allora ha l'estremo superiore, ossia esiste un punto P sulla seconda circonferenza, tale che OP = sup($\Re$). Se OP = r siamo a posto: P è l'unica intersezione tra le due circonferenze nel semipiano fissato.



Se no, i punti R dell'arco della seconda circonferenza individuato dall'angolo al centro PÔ'O sono tali che OR < r ed appartengono tutti al primo cerchio. Quelli S dell'altro arco, formando un angolo SÔ'O maggiore di PÔ'O, sono tali che OS > OP. Allora, la contiguità degli angoli determina il fatto che OP = r.

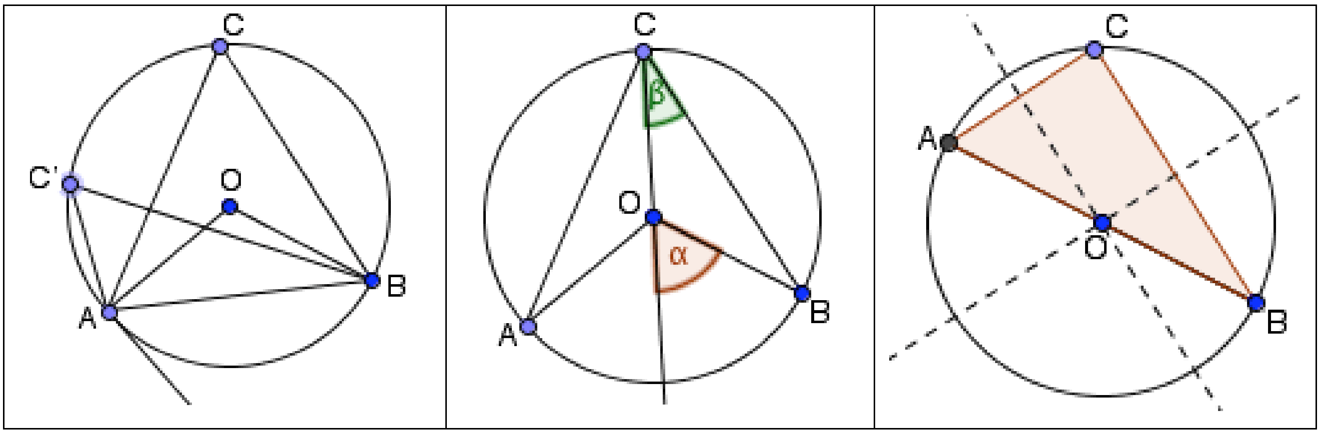
Ogni punto R dell'arco PH è interno alla prima circonferenza, quindi OR appartiene ad $\Re$.
Lo stesso sull'altro semipiano.
Dunque, le due circonferenze hanno in comune due punti P e Q

La retta che li congiunge è detta *asse polare*. Poiché OPO'Q è un quadrilatero formato da due triangoli isosceli con la stessa base PQ, allora OO' è asse di PQ.

NOTA. Nel campo razionale, anche se i cerchi hanno infiniti punti in comune, due circonferenze possono non avere punti in comune.
Se consideriamo oltre ai punti reali anche i punti complessi, i punti in comune sono sempre due, distinti o no.
Se infine consideriamo anche i *punti impropri* del piano complesso, due circonferenze reali hanno altri due punti in comune, i *punti ciclici* del piano $(1, \pm i, 0)$, per cui passano tutte.

Angoli al centro ed alla circonferenza. Le proprietà più note delle circonferenze riguardano gli angoli al centro e quelli alla circonferenza. Questi ultimi hanno il vertice sulla circonferenza, ed i lati secanti o tangenti alla circonferenza.

Siano C il vertice, A e B i due punti di intersezione, O il centro. L'angolo $A\hat{O}B$ si dice corrispondente all'angolo alla circonferenza $A\hat{C}B$.



Come noto e facile da dimostrare, si ha $A\hat{O}B = 2\ A\hat{C}B$. La proprietà vale anche nel caso in cui uno dei lati dell'angolo alla circonferenza sia tangente alla circonferenza. In tal caso, detto CB il lato secante, l'angolo al centro è $B\hat{O}C$.

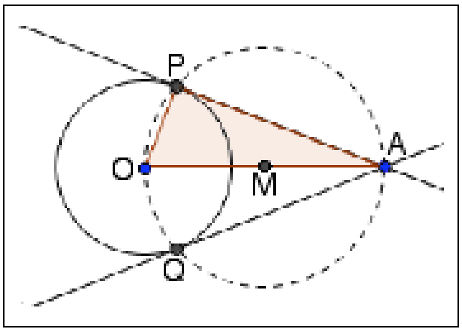
Se entrambi i lati sono tangenti, l'angolo alla circonferenza è piatto e l'angolo al centro è l'angolo giro.

Infine, il caso più importante è quello dell'angolo al centro piatto: in tal caso, gli angoli alla circonferenza sono retti.

In definitiva, un triangolo rettangolo ha il circocentro nel punto medio dell'ipotenusa, e l'ipotenusa è un diametro della circonferenza circoscritta.

Le tangenti. Usiamo questa proprietà per dimostrare che per un punto A non appartenente ad un cerchio passano due rette tangenti alla circonferenza.

Detto O il centro del cerchio, si prenda il punto medio M di OA e si tracci la circonferenza di centro M e raggio OM. Essa taglia in due punti P e Q la circonferenza data. Il triangolo OPA è rettangolo in A, quindi OP perpendicolare ad AP implica AP tangente alla circonferenza data. Lo stesso dall'altra parte.



Notiamo anche che AO è la bisettrice di $P\hat{A}Q$.

Una proprietà più strana: dato un segmento AB ed un angolo acuto α, l'insieme dei punti C tali che $A\hat{C}B = \alpha$ è in ogni semipiano di origine AB un arco di circonferenza il cui centro O è tale che $A\hat{O}B = 2\alpha$. Basta osservare che in tal caso, $O\hat{A}B = (180°-2\alpha)/2 = 90°-\alpha$. Costruito un tal angolo sul lato AB, intersecato l'altro lato con l'asse di AB, abbiamo il centro O e quindi possiamo tracciare la circonferenza di raggio OA. Tutti e soli i punti C dell'arco incluso nel semipiano hanno la proprietà richiesta.

COSTRUZIONI. Riga e compasso consentono di disegnare segmenti e circonferenze. Con questi due strumenti possiamo costruire una serie di figure geometriche:

a) asse di un segmento AB: le circonferenze di centri A e B e raggio AB si incontrano in due punti dell'asse di AB.
b) Il punto medio di un segmento AB: si interseca AB col suo asse.
c) La perpendicolare da un punto P ad una retta r. Se $P \in r$, si prenda un punto Q su r, diverso da P e si costruisca la circonferenza di centro P e raggio OP. Detto R l'altro punto di intersezione della circonferenza con r, si tracci l'asse di QR. Se $P \notin r$, si prenda un punto Q nell'altro semipiano, si tracci la circonferenza di centro P e raggio PQ e siano A e B le due intersezioni con r: l'asse di AB è la perpendicolare cercata.
d) La parallela per un punto P ad una retta r: si tracci la perpendicolare s per P ad r e poi la perpendicolare t per P ad s: allora t è la parallela per P ad r.
e) Le tangenti da un punto A ad una circonferenza γ di centro O. Si tracci OA: se $A \in \gamma$ basta la perpendicolare per A ad OA; se A è esterno al cerchio, si trovi il punto medio M di OA e la circonferenza di centro M e raggio MA; detti P e Q i due punti intersezione delle circonferenze, AP ed AQ sono le tangenti richieste. Se A è interno al cerchio, le tangenti non ci sono.
f) Dati tre punti distinti A, B, C, trovare il quarto vertice D del parallelogramma ABDC: sia M il punto medio di BC, tracciare la semiretta AM e la circonferenza di centro M e raggio MA: il punto D intersezione tra semiretta e circonferenza è il punto cercato. Un modo alternativo: tracciare le circonferenze di centro B e raggio AC e di centro C e raggio AB; il punto D è una delle loro intersezioni. Ciò richiede di aprire il compasso in modo che il raggio sia il segmento richiesto.

Queste ed altre costruzioni possono essere eseguite anche con opportuni software di Geometria dinamica, come i più noti Cabri, Geogebra, o altri similari in disuso. Questi software hanno già delle macro che consentono di effettuare queste costruzioni in un passaggio solo.
Esistono anche versioni in grado di eseguire costruzioni "tridimensionali".
Ciò rende forse obsoleto l'argomento delle costruzioni con riga e compasso, pur essendo una buona sfida per gli allievi il riuscire, per esempio, a costruire i poligoni regolari con tre, quattro, cinque, sei lati, o quelli che si ottengono da questi raddoppiando il numero dei lati, o la rappresentazione assonometrica o prospettica o la proiezione ortogonale di un solido.

EQUIVALENZE. Siamo al punto più grigio della prima parte del corso di Geometria.

Tra le figure è data una relazione detta *equiestensione* o semplicemente e tradizionalmente *equivalenza*.

Ovviamente chiediamo che sia una relazione d'equivalenza. Ma poi?

Postuliamo che figure congruenti siano equivalenti.

In particolare, se diciamo equiscomposti due poligoni che siano somma di poligoni congruenti, allora postuliamo che poligoni equiscomposti siano equivalenti.

Notiamo non è detto valga il viceversa, ossia che figure equivalenti siano equiscomponibili.

Postuliamo anche che somme o differenze di poligoni equivalenti siano equivalenti.

Questo non basta certo a dire che cosa ci sia nella classe di equiestensione di una data figura, ma Euclide si occupa di alcuni casi particolari, ossia dei poligoni.

Per cominciare, dato un parallelogramma, scegliamo due lati opposti come *basi* e chiamiamo *altezza* il segmento di perpendicolare che le congiunge.

fig. 1

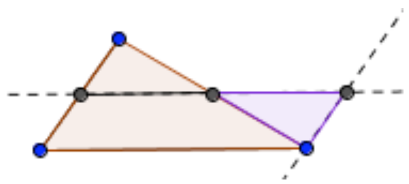


fig. 2

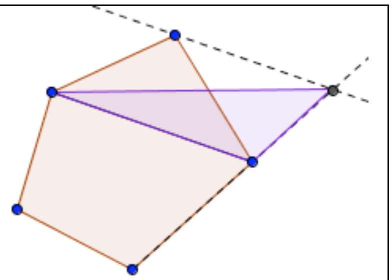


fig. 3

Euclide dimostra facilmente che ogni parallelogramma è equiesteso ad un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza, perché equiscomposti nella somma di uno stesso trapezio rettangolo e di due triangoli rettangoli congruenti (fig. 1).

Dimostra poi che ogni triangolo è equiesteso ad un parallelogrammo con una base congruente ad un lato del triangolo ed altezza uguale alla metà dell'altezza relativa a quel lato (fig. 2).

Ne segue che due triangoli con uno stesso lato e la stessa altezza relativa a quel lato sono equiestesi.

Poi, ogni poligono con $n > 3$ lati è equiesteso ad un triangolo (fig. 3).

Procediamo per induzione su n. Sia vero per n-1 lati. Ogni poligono, anche concavo, ha sempre un angolo convesso. Siano AB, BC, CD tre lati consecutivi e sia convesso l'angolo di vertice B. Si tracci la diagonale AC, poi si prolunghi il lato CD e sia E il punto d'intersezione con la parallela per B ad AC. Allora ABC e ABE hanno la stessa base e la stessa altezza, quindi sono equiestesi. Poiché il poligono ottenuto sostituendo ABC con ABE è somma di poligoni equiestesi, è equiesteso col poligono iniziale.

Inoltre, poiché i segmenti CD e CE sono adiacenti, si sostituiscono con la loro somma CE. Allora il nuovo poligono ha n-1 lati. Per induzione si conclude.

Ne segue che tutti i poligoni sono equiestesi a rettangoli.

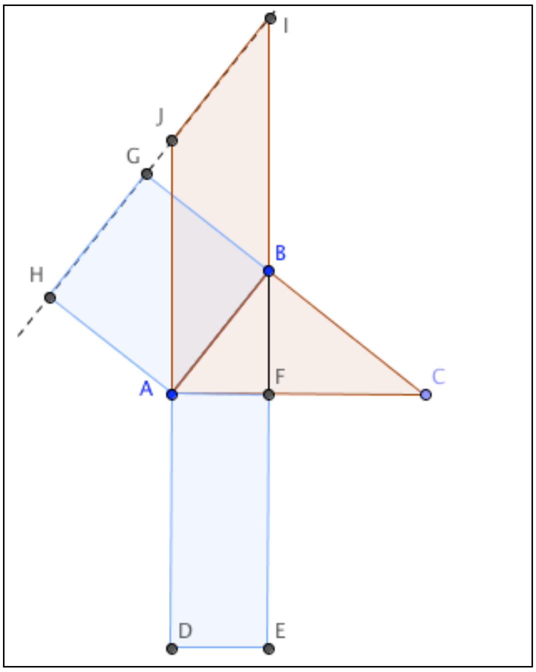
Ma ora, come fare a vedere se due rettangoli sono o no equiestesi?

In particolare, è vero che ogni rettangolo è equiesteso ad un quadrato?

Se lo è, i quadrati sono i rappresentanti delle classi di equiestensione dei poligoni.

Il prossimo teorema, un capolavoro della Geometria euclidea, risponde a questo e ad altri quesiti.

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE. Sia dato un triangolo ABC, rettangolo in B, e sia F il piede della perpendicolare da B ad AC. Allora Il rettangolo coi lati congruenti ad AB e AF è equivalente (equiesteso) al quadrato di lato AB.

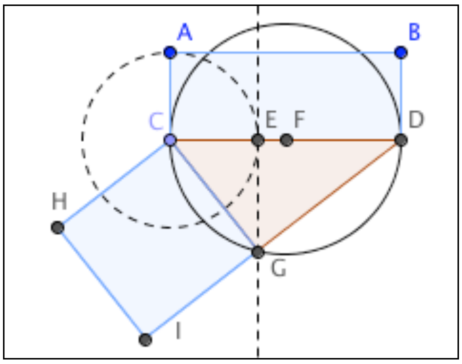


Ci riferiamo ai simboli sulla figura. Costruito il rettangolo di lati AF e AD = AC, ed il quadrato di lato AB, sia J il punto comune alle rette HG e AD. Il triangolo AHJ è congruente ad ABC. Infatti, sono rettangoli in H e B rispettivamente; poi, AB = AH e JÂH = BÂC perché complementari dello stesso angolo JÂB. Allora, in particolare le ipotenuse AJ e AC sono congruenti. Ne segue che il parallelogramma ABIJ ed il rettangolo AFED sono equiestesi, avendo basi ed altezze congruenti. Ma anche il quadrato ABGH ed il parallelogramma ABIJ hanno la stessa base ed altezze congruenti, dunque sono equiestesi.

Per la proprietà transitiva della equiestensione, il quadrato di lato AB ed il rettangolo AFED sono equiestesi.

Il teorema precedente ha varie conseguenze. Per cominciare, risponde al nostro quesito, perché dato un rettangolo si trova un quadrato ad esso equiesteso.

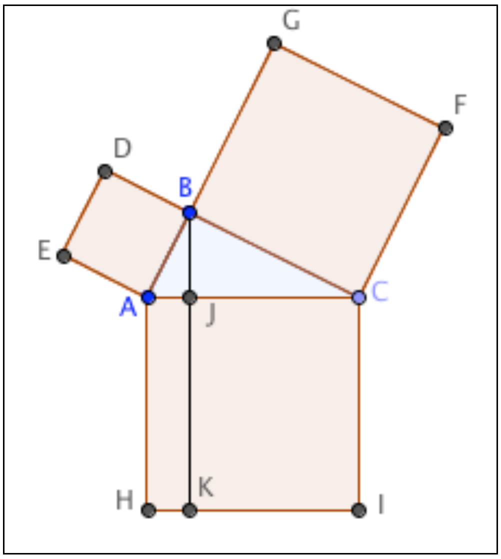
Dato il rettangolo ABDC, sul segmento CD, si prenda il punto E tale che EC = CA. Sia F il punto medio di CD. Si tracci la circonferenza di centro F e raggio FD. La perpendicolare a CD per E incontra la semicirconferenza nel semipiano opposto in un punto G. Il triangolo CGD è allora rettangolo in G. Il quadrato di lato CG è allora equiesteso al rettangolo ACDB, che ha come lati l'ipotenusa e la proiezione CE del cateto CG.



La conseguenza principale è però un'elegante dimostrazione del teorema più famoso della storia, forse uno dei più antichi scoperti ed usati dall'umanità.

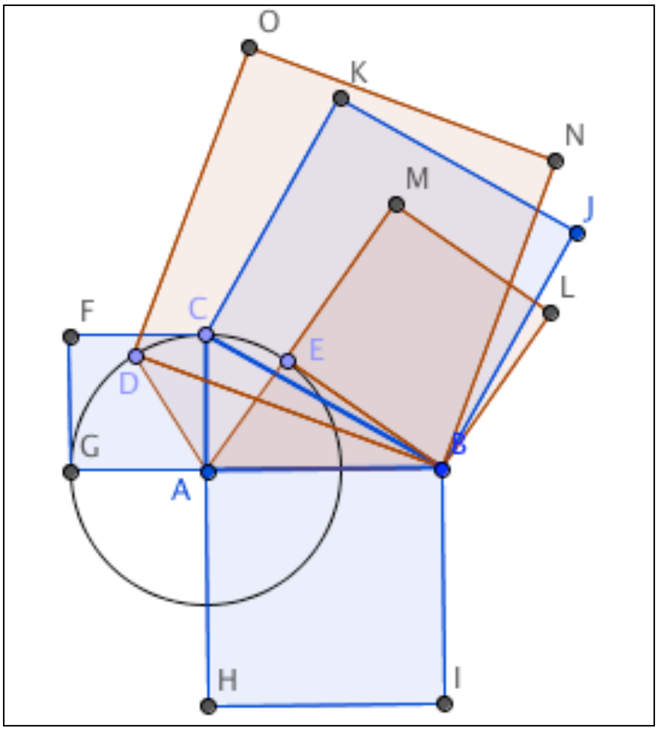
TEOREMA DI PITAGORA. Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

Costruiti i tre quadrati sui lati del triangolo ABC, rettangolo in B, tracciata l'altezza BJ relativa all'ipotenusa e prolungata fino ad incontrare in K il lato del quadrato dell'ipotenusa opposto ad AC, per il teorema di Euclide il quadrato di AB è equivalente al rettangolo AJKH, mentre il quadrato di lato BC lo è del rettangolo JCIK. Allora la somma dei due quadrati è equivalente alla somma dei due rettangoli, che danno il quadrato di lato l'ipotenusa AC.

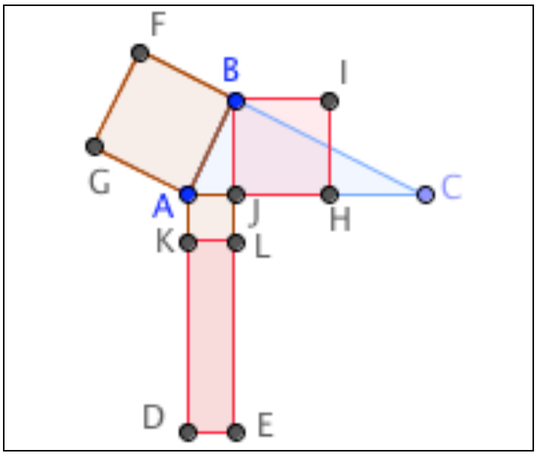


Il teorema di Pitagora si può invertire: un triangolo è rettangolo se e solo se il quadrato del lato maggiore è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due.

Per dimostrarlo basta ricordare che due triangoli con gli stessi due lati ma angoli compresi diversi hanno i terzi lati disuguali come gli angoli opposti. Allora, se dato il triangolo rettangolo ABC, con Â retto, teniamo fissi i lati AB ed AC, ma variamo l'angolo compreso, il lato opposto sarà minore o maggiore dell'ipotenusa BC, quindi anche il suo quadrato sarà minore o rispettivamente maggiore del quadrato di BC, quindi della somma dei quadrati di AC ed AB. Pertanto, solo se l'angolo Â è retto vale l'uguaglianza.



Come conseguenza di questo teorema, ricordiamo che gli antichi progenitori di migliaia di anni fa usavano la *terna pitagorica* più famosa, 3, 4, 5, per costruire angoli retti, necessari alle costruzioni di edifici, con l'ausilio di una cordicella con 13 nodi all'incirca equidistanti; unito il primo con l'ultimo, si ottengono 12 segmenti che formano un triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5 segmenti. Euclide poi ricava una formula per ottenere tutte le *terne pitagoriche* di numeri naturali a, b, c tali che $a^2 + b^2 = c^2$, con a, b, c primi tra loro.



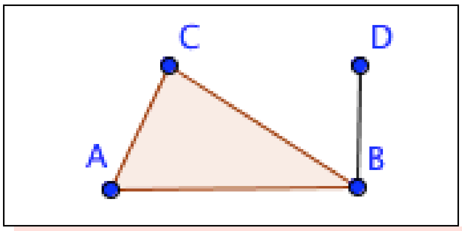
SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE. Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le due *proiezioni* dei cateti sull'ipotenusa.

L'altezza BJ divide il triangolo ABC, rettangolo in B, in due triangoli rettangoli. Il primo teorema di Euclide implica l'equivalenza tra il quadrato di lato AB e il rettangolo di lati AJ e AD = AC. Il teorema di Pitagora afferma che il quadrato di lato AB è equivalente alla somma dei quadrati di BJ ed AJ.
Allora, ADEJ è equivalente alla somma dei quadrati di AJ e BJ. Dunque, il quadrato di BJ è equiesteso al rettangolo di lati KL = AJ e KD = AD-AK = AC-AJ.

Questo teorema sarà importante nello stabilire la condizione di perpendicolarità di due rette nel piano cartesiano.

Perché ho parlato di *zone grigie*?

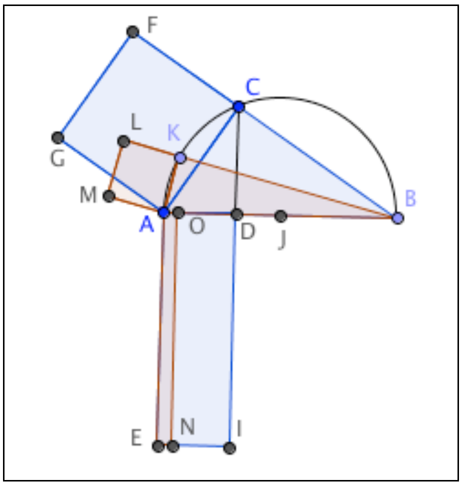
Che cosa c'è nella classe di equiestensione di un punto? E in quella di una retta? O di un semipiano, di un angolo ecc?



Nella figura qui accanto, il triangolo ABC è o no equiesteso con la figura ottenuta "sommando" al triangolo il segmento BD?

E se togliamo il lato AB?

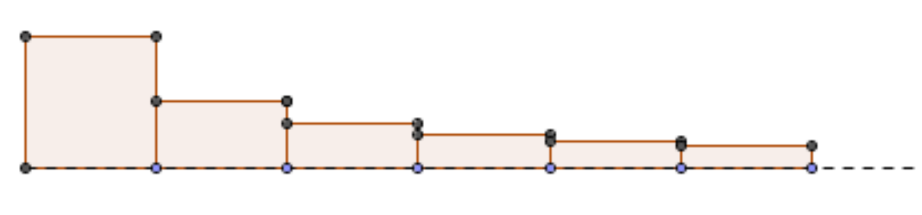
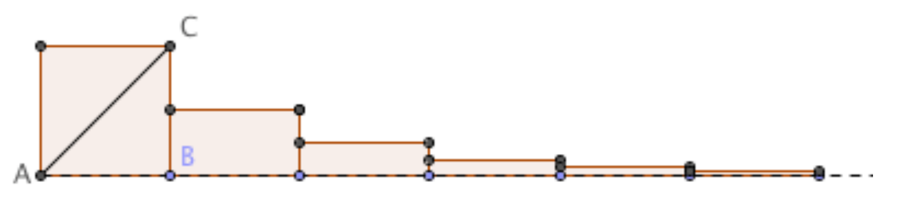
Forse ci serve un postulato, che affermi che nella classe di un punto ci sono tutti i punti, tutte le rette, tutti i segmenti, tutte le semirette e le circonferenze.



Una giustificazione euristica dell'equivalenza fra punti e segmenti potrebbe essere data dal primo teorema di Euclide: se spostiamo il vertice C dell'angolo retto verso un estremo A dell'ipotenusa il quadrato di AC resta equivalente al rettangolo AEID, con AE = AB, ma il nuovo quadrato di lato AK è minore del precedente. Al tendere di C ad A, esso si riduce al punto A, mentre il rettangolo si riduce al segmento AE.

Il passaggio dai segmenti alle semirette ed alle rette sembra naturale, anche non sono figure limitate come i segmenti.

Talora però questi passaggi non sono così scontati

	Il poligono qui accanto è somma di rettangoli con basi congruenti. Il rettangolo n-esimo ha altezza pari ad 1/n della base.
	Il poligono qui accanto è somma di rettangoli con basi congruenti. Il rettangolo n-esimo ha altezza pari ad 1/2 dell'n-1-esimo.

Il primo dei rettangoli è il quadrato della base. Aumentando il numero dei rettangolini, il quadrato equivalente aumenta. Se si considera la totalità dei rettangolini, si ottiene in entrambi i casi una figura equivalente ad un quadrato? Nel secondo caso sì, nel primo caso no, come insegna l'Analisi Matematica: a che cosa è equivalente?

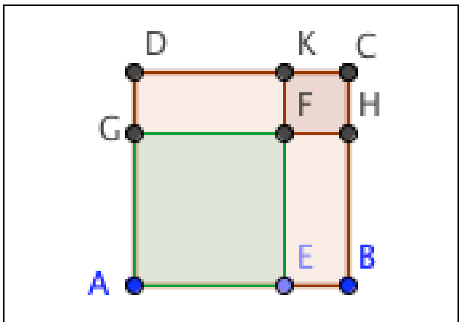
Euclide afferma che il tutto non è equivalente ad una sua parte propria.

Ma le figure a cui pensa Euclide forse, con linguaggio moderno, sono solo chiusure di aperti connessi, come un poligono o un cerchio.

Ma che cosa accade se "sbucciamo" un quadrato? Otteniamo un sottoinsieme proprio, quindi abbiamo una classe di equiestensione diversa?

Allora, forse servirebbe anche postulare che aggiungere o togliere da una figura un elemento della classe di equiestensione dei punti non fa passare la figura così ottenuta ad una classe differente.

Ossia, se la differenza tra due figure è equiestesa ad un punto, la classe di equiestensione non cambia. Se non lo è, la classe è diversa. Poi, postulare (?) che nessun quadrato sia equiesteso ad un punto.



Allora, quadrati con lati diversi AB ed AE determinano una differenza che è somma di due rettangoli ed un quadrato, quindi non sono equiestesi.

Questo risolve tutti i problemi?

Peano costruì una *curva* che riempie un intero quadrato, quindi?

E se, nel piano cartesiano, dal quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) tolgo "uno dopo l'altro" *tutti* i segmenti paralleli all'asse y e di ascissa razionale, la figura restante è equivalente al quadrato?

E se tolgo quelli di ascissa irrazionale?

Dall'altra parte del gioco, nella classe di equiestensione dell'intero piano che figure ci sono?

Ci sono gli angoli, i semipiani, la parte esterna ad un cerchio o ad un poligono convesso?

Ci mettiamo ogni figura illimitata?

No, certo, le rette le abbiamo messe nella classe dei punti.

Inoltre, il secondo dei due multirettangoli che abbiamo visto nella pagina precedente è equivalente al quadrato della diagonale AC.

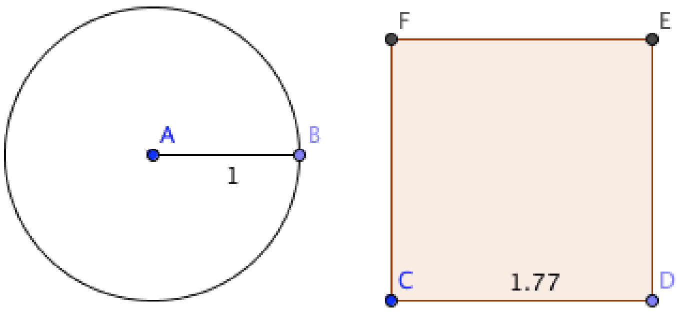
Si può affermare che ogni figura è equiestesa o ad un punto, o ad un opportuno quadrato o al piano intero?

Insomma, la teoria dell'equiestensione illumina abbastanza i poligoni, ma tutto il resto, dalle curve alle figure illimitate o alle figure "strampalate" come le nuvole di punti o i *frattali* resta nell'ombra.

Dobbiamo ringraziare gli antichi greci come Eudosso ed Archimede, i matematici dell'epoca barocca (Newton, Leibniz, Cavalieri, Torricelli, ecc), o i moderni come Riemann e Lebesgue per avere cercato di ridurre le parti oscure di questo argomento.

In particolare, dobbiamo agli antichi greci, in particolare ad Archimede, l'avere *quadrato il cerchio*, ossia dimostrato che ogni cerchio è equiesteso ad un opportuno quadrato.

Dato il raggio del cerchio, la costruzione effettiva del quadrato ad esso equivalente non si può eseguire con riga e compasso, ma questa è, incredibilmente, una scoperta tardo ottocentesca, derivata dalla teoria di Galois e da un teorema di Liouville.



NOTA. La figura precedente è eseguita con un software, che consente una costruzione approssimata del quadrato equiesteso al cerchio dato, usando le conoscenze contenute nella prossima sezione.

Sezione 5. – Quando il gioco si fa duro ....

A conclusione della sezione precedente, una figura mostra un cerchio ed un quadrato "approssimativamente" equivalenti. Ora affrontiamo insieme lo scoglio più duro dei corsi di geometria della scuola superiore: la teoria delle grandezze, che in gran parte abbiamo già delineato parlando di segmenti, ma che ora deve completarsi nella definizione di rapporto fra grandezze.

GRANDEZZE La nozione di insieme di grandezze la possiamo riprodurre da quel che abbiamo visto per i segmenti.

Ingredienti:

- un insieme X non vuoto,
- una relazione di equivalenza ~ in X,
- una relazione d'ordine ≤ in X,
- una relazione $\Re \subseteq X^3$ (la futura addizione tra grandezze)

Assiomi di base:

- Per ogni coppia $B_1,\ B_2 \in X/\sim$ esistono $x \in B_1$ ed $y \in B_2$ tali che x ≤ y oppure y ≤ x. Inoltre, se x'~x, y'~y e x', y' sono confrontabili in X, allora x' ≤ y' ⇔ x ≤ y
- Per ogni coppia $B_1,\ B_2 \in X/\sim$ esistono $x \in B_1,\ y \in B_2$ e $z \in X$ tali che $(x, y, z) \in \Re$. Inoltre, se x'~x, y'~y e x', y' ed esiste z'∈X, tale che $(x', y', z') \in \Re$ allora z ~ z'.

Il primo assioma assicura che la relazione d'ordine si può trasferire all'insieme quoziente e che diventa ivi un ordine totale. Ossia, per ogni coppia $B_1,\ B_2 \in X/\sim$ si può porre $B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow \exists x \in B_1, y \in B_2,\ x \leq y$, e la definizione è ben posta.

Il secondo assioma assicura che si può definire nel quoziente X/~ un'operazione + tale che per ogni coppia $B_1,\ B_2 \in X/\sim$ esiste $B_3 \in X/\sim$ tale che

$$B_1 + B_2 = B_3 \Leftrightarrow \exists x \in B_1,\ y \in B_2,\ z \in B_3,\ (x, y, z) \in \Re$$

e la definizione è ben posta, perché la somma non dipende dai rappresentanti, ma solo dalle classi.

Ciò consente di chiamare *congruenza* la relazione ~.

Occorrono poi altri assiomi che assicurino la commutatività, l'associatività e la legge di cancellazione di questa operazione, ed anche l'esistenza di un elemento neutro.

In definitiva, (X/~, +, 0) è un *monoide commutativo regolare*.

Infine, pretendiamo che questo ordine sia compatibile con la struttura di monoide, ossia:

$$\forall [x]_\sim,[y]_\sim,[z]_\sim \in X/\sim,\ [x]_\sim \le [y]_\sim \Rightarrow [x]_\sim + [z]_\sim \le [x]_\sim + [z]_\sim .$$

Un esempio si ha con l'insieme dei numeri naturali, in cui ~ è l'identità e l'ordine è quello consueto.

Si veda anche la scheda integrativa G2 per le nozioni sui monoidi ordinati.

NOTA. Ho preferito la relazione ternaria $\mathfrak{R}$ al posto di una addizione parziale + in X perché ci sono casi importanti in cui elementi diversi di X sono "somma" degli stessi addendi.

Saltiamo tutti i casi che non interessano la Geometria.

Postuliamo quindi che l'ordine nel quoziente X/~ sia denso e completo, quindi archimedeo e che ogni elemento del monoide abbia sottomultipli n-esimi per ogni n∈N, n ≥ 1.

$\boxed{\text{RAPPORTI E PROPORZIONI}}$. Date due (classi di congruenza di) grandezze α, β, non nulle, può accadere che esistano due numeri naturali m, n non nulli tali che $m\alpha = n\beta$. In tal caso, diciamo che $\beta = \frac{m}{n}\alpha$, o anche che il rapporto di β ed α è $\frac{m}{n}$.

Modi equivalenti di scrivere questo fatto: $\beta = \frac{1}{n}(m\alpha) = m\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$. Non è ovvio, ma si dimostra facilmente per induzione.

Meno facilmente si dimostra che se per ogni numero naturale p non nullo si ha

$$\beta = \frac{m}{n}\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}\alpha .$$

Tuttavia, anche questo è vero, dunque il rapporto di β ed α è un numero razionale positivo o "assoluto" come dicono nella scuola secondaria.

Le due grandezze sono allora classicamente dette *commensurabili*.

Tuttavia, sappiamo che, parlando di segmenti, il lato e la diagonale del quadrato non lo sono, e neppure il lato e l'altezza di un triangolo equilatero.

Se date le grandezze α, β, non nulle non esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ che sia il loro rapporto, le grandezze sono dette *incommensurabili*.

Per esprimerlo in versione positiva, possiamo dire che due grandezze α, β, non nulle sono incommensurabili se per ogni m, n non nulli si ha $m\alpha < n\beta$ o $m\alpha > n\beta$.

Queste relazioni si mantengono per frazioni $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m \cdot p}{n \cdot p}$ equivalenti.

Dunque possiamo suddividere i numeri razionali positivi in due sottoinsiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}^+ \middle| \, m\alpha < n\beta \right\}, \; B = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}^+ \middle| \, m\alpha > n\beta \right\}.$$

I due insiemi sono non vuoti, separati, ma anche contigui. La dimostrazione non è immediata, ed è dovuta forse ad Eudosso di Cnido.

Una dimostrazione moderna è basata sul metodo dei dimezzamenti: presi $r \in \mathcal{A}$, $s \in \mathcal{B}$ ed $m = \frac{r+s}{2}$, se $m \in \mathcal{A}$ allora si prende m come nuovo r; se m $s \in \mathcal{B}$ si prende m come nuovo s. La differenza tra i nuovi r ed s è metà della precedente. Iterando il processo, si rende s-r piccolo a piacere.

Osserviamo che questo discorso si può fare anche se le grandezze sono commensurabili. In tal caso, l'elemento separatore di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ esiste ed è proprio il loro rapporto. Potremmo dire che ogni elemento di $\mathcal{A}$ *approssima per difetto* il rapporto, mentre ogni elemento di $\mathcal{B}$ lo *approssima per eccesso.*

Possiamo identificare allora il rapporto con questa coppia di insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Ma se le due grandezze sono incommensurabili? Chi ci vieta di chiamare rapporto questa coppia d'insiemi contigui? Possiamo anche chiamarlo *numero irrazionale*.

Allora due grandezze incommensurabili hanno rapporto irrazionale.

I rapporti fra grandezze non nulle sono dunque, in linguaggio moderno, *numeri reali positivi* (definiti secondo il procedimento ispirato a quello di Dedekind).

Se il rapporto di due grandezze non nulle α, β è il numero reale positivo x, allora il rapporto di ogni grandezza α' congruente ad α rispetto ad ogni grandezza β' equivalente a β è sempre x. Si dimostra con pazienza, prima per i rapporti razionali, poi per gli irrazionali.

Ciò posto, osserviamo che per ogni numero x reale "assoluto", ossia $x \geq 0$ e per ogni grandezza α ha senso considerare la grandezza $x\alpha$. Pertanto, abbiamo un'azione dell'insieme ordinato dei numeri reali assoluti, con le sue operazioni di addizione e moltiplicazione, sulla classe di grandezze "omogenee" $X/\sim$ con le sue operazioni ed ordinamento. Che proprietà possiede questa azione?

A) *Uguaglianza*: per tutti i numeri reali assoluti x, y e per tutte le grandezze α, β si ha:

a1) Se α non è la grandezza nulla, $x\alpha = y\alpha \Leftrightarrow x = y$;

a2) Se $x \neq 0$, $x\alpha = x\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

B) *Monotonicità*: siano α, β, γ y tre grandezze, con α diversa dalla grandezza nulla, e siano x, y tali che $\beta = x\alpha$, $\gamma = y\alpha$. Si ha $\beta < \gamma \Leftrightarrow x < y$.

C) *Compatibilità*: siano α, β due grandezze, x ed y due numeri reali ≥ 0. Allora:

c1) $(x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha$;

c2) $(xy)\alpha = x(y\alpha)$;

c3) $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$;

Inoltre, certamente $1\alpha = \alpha$ e 0α è la grandezza nulla.

NOTA. Queste proprietà sono le traduzioni additive delle proprietà delle potenze con base reale positiva ed esponente reale, in questo caso non negativo.
Le dimostrazioni quindi sono molto simili nella procedura: prima si esamina il caso di x, y numeri naturali, poi quello di x, y razionali "assoluti", ossia ≥ 0, ed infine il caso generale, mediante l'uso di coppie di classi contigue di numeri razionali che individuino i due numeri x ed y.
La difficoltà maggiore è spesso nel dimostrare che le classi sono davvero contigue.

Misure. Ora fissiamo una grandezza non nulla μ. Ogni altra grandezza α ha un rapporto, razionale o irrazionale, con μ.
Grandezze congruenti hanno con μ lo stesso rapporto. Pertanto, si può definire il rapporto di ogni classe di grandezze con la classe di grandezza di μ e chiamarla *misura* della classe di grandezze rispetto a quella di μ.
La misura della classe di μ è ovviamente 1. La misura della classe nulla è zero.

Le proprietà A), B) C) assicurano che l'associare ad ogni grandezza la sua misura rispetto a μ è *un isomorfismo* tra il monoide ordinato delle classi di grandezze e quello dei reali non negativi.
Pertanto, un insieme di classi di congruenza di grandezze con l'addizione e l'ordine continuo e denso è una "copia" del monoide additivo ordinato $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.
Questo vale per i segmenti, che sono il prototipo delle classi di grandezze.

Proporzioni. Due insiemi di grandezze $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ si dicono *direttamente proporzionali* se esiste una funzione biiettiva $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ tale che per ogni coppia $\alpha_1, \alpha_2 = x\alpha_1 \in \mathcal{A}$ si ha in $\mathcal{B}$, $f(\alpha_2) = xf(\alpha_1)$. Posto $\beta_i = f(\alpha_i)$, si scrive $\alpha_2 : \alpha_1 = \beta_2 : \beta_1$, e questa uguaglianza di rapporti si chiama *proporzione*.
Se le grandezze sono *omogenee*, cioè appartengono allo stesso insieme di grandezze, da questa proporzione, *scambiandone i medi*, si ricava $\alpha_2 : \beta_2 = \alpha_1 : \beta_1$.

Infatti, da $\begin{cases} \alpha_2 = x\alpha_1 \\ \beta_2 = x\beta_1 \end{cases}$, posto $\alpha_1 = y\beta_1$ segue $\alpha_2 = x\alpha_1 = x(y\beta_1) = (xy)\beta_1 = (yx)\beta_1 = y(x\beta_1) = y\beta_2$

e quindi $\alpha_2 : \beta_2 = y = \alpha_1 : \beta_1$.

NOTA. Si possono ricavare altre sei proporzioni con le stesse quattro grandezze, esattamente come si fa con le usuali proporzioni tra numeri reali.

Si ha allora il **teorema di Talete** (quello "grande"):
Dato un fascio di rette parallele, tagliate da due trasversali r, s, dati quattro punti A, B, C, D su r e detti A', B', C' D' i corrispondenti punti su s ottenuti intersecandola con le rette del fascio passanti per A, B, C, D, se Il rapporto fra CD ed AB è x, anche il rapporto fra C'D' e A'B' è x.
Si può anche dire che si stabilisce fra i segmenti di r e i corrispondenti di s una *proporzionalità diretta*: CD:AB = C'D':A'B'.

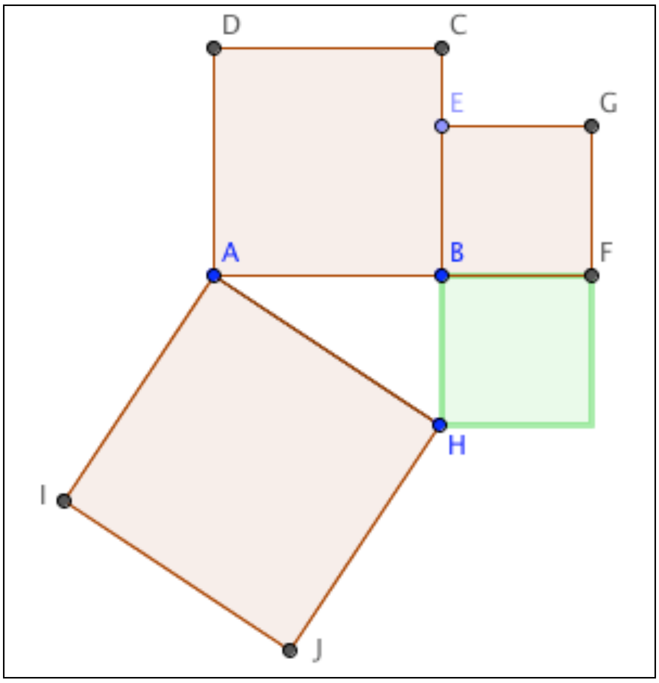
La dimostrazione è a grandi linee la seguente: se il rapporto è razionale, l'asserto deriva subito dal piccolo teorema di Talete. Se è irrazionale, si considerano i segmenti CH inclusi in CD, con rapporto razionale rispetto ad AB; allora i corrispondenti C'H' hanno lo stesso rapporto rispetto ad A'B'. Perciò i due insiemi di rapporti razionali coincidono. Il rapporto irrazionale x è l'estremo superiore di questo unico insieme di rapporti razionali, dunque CD:AB = x = C'D':A'B'.

Vale anche il viceversa: se A, B, C, D sono sulla trasversale r, A', B', C' sono corrrispondenti mediante le parallele su s e preso D' tale che CD:AB = C'D':A'B', allora DD' fa parte del fascio di parallele, purché D' stia rispetto a C' sulla semiretta giusta di s.

Abbiamo osservato che esiste un isomorfismo tra ogni insieme di grandezze e il monoide additivo dei reali assoluti, che ad ogni grandezza associa la sua misura rispetto ad una fissata grandezza non nulla, detta unità di misura. Allora, il rapporto fra due grandezze coincide col rapporto fra le loro misure.

Per i segmenti, possiamo fissare uno di essi non nullo, (o meglio, una classe di congruenza di segmenti) come unità di misura, e lo denotiamo con μ.
Dato un segmento AB, denotiamo secondo consuetudine con $\overline{AB}$ la sua misura rispetto alla prefissata unità di misura μ. Allora si ha $AB : CD = \overline{AB} : \overline{CD}$.

I poligoni sono una classe di grandezze? Si parla di somma, di equiestensione e tra gli assiomi c'è la compatibilità fra somma ed equiestensione. Si è dimostrato che ogni poligono è equivalente ad un quadrato ed uno solo. Allora possiamo usare i quadrati per rappresentare le classi ed i loro rapporti. Possiamo usarli anche per rappresentare l'ordinamento fra le classi di equiestensione: una classe è minore di un'altra se il quadrato appartenente alla prima classe è possibile includerlo nel quadrato appartenente alla seconda classe. Ciò accade se e solo se il lato del primo quadrato è minore di quello del secondo. Allora abbiamo un ordine totale, che riproduce l'ordine fra i segmenti, intesi qui come lati dei quadrati che rappresentano univocamente le classi.



Date ora due classi di equiestensione, possiamo prendere i quadrati che li rappresentano e "sommarli" in modo che la figura ottenuta sia la loro unione, mentre l'intersezione sia un lato del quadrato minore. Si ottiene un poligono con angoli retti o esplementari di retti, e si può trovare il quadrato ad esso equivalente. La classe di questo quadrato è definita come la somma delle due classi.

NOTA. Il teorema di Pitagora consente di trovare agevolmente il quadrato equivalente alla somma dei due quadrati dati.

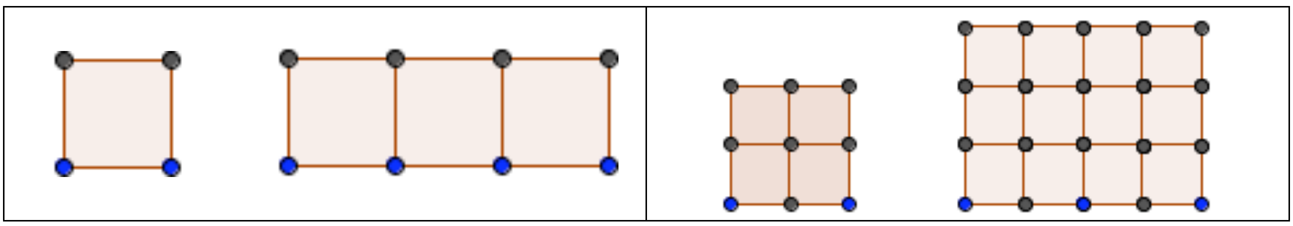
Così otteniamo una classe di grandezze, quella dei poligoni modulo l'equiestensione.

Fissiamo come unità di misura dei poligoni il quadrato avente per lato l'unità di misura μ dei segmenti. La sua area la indichiamo con μ^2 e lo chiamiamo *quadrato unitario*.

Dato un poligono, lo trasformiamo nel quadrato equivalente, di lato ℓ. Ma poi dobbiamo calcolare l'area di questo quadrato. Come si calcola?

Rettangoli. Più in generale, consideriamo un rettangolo ABDC e supponiamo che i lati AB e AC misurino b ed h rispetto all'unità di misura μ. Allora l'area è $(b \cdot h)\mu^2$.

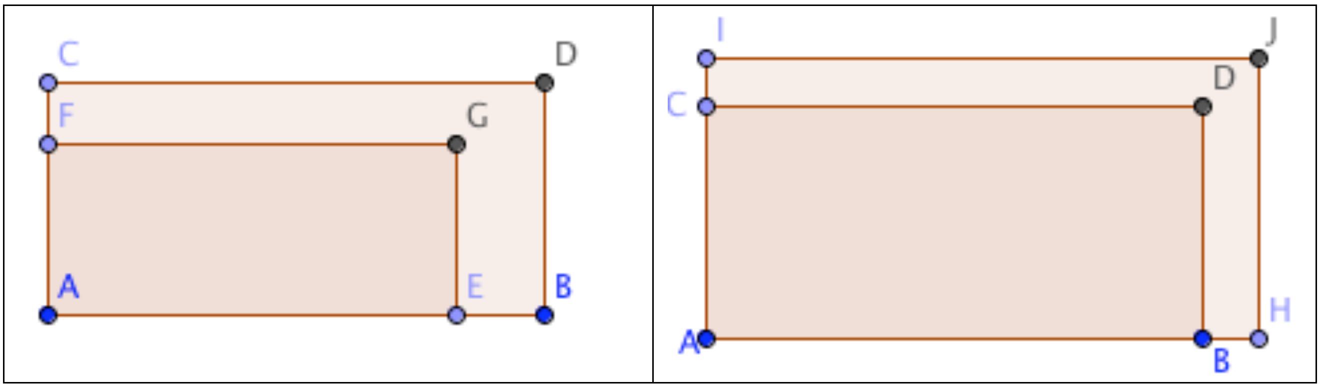
Infatti, se h = 1 e b è intero, allora il rettangolo è somma di b quadrati unitari, quindi l'area del rettangolo è $b\mu^2$. Più in generale, se anche h è intero ≥ 1, il rettangolo è somma di b·h quadrati unitari e la sua area è $(b \cdot h)\mu^2$.



Se un quadrato ha lato $\frac{1}{n}\mu$, allora il quadrato unitario è somma di n^2 quadratini. Possiamo perciò affermare che l'area del quadratino è $\left(\frac{1}{n^2}\right)\mu^2$.

Supponiamo ora che le misure h e b dei lati del rettangolo abbiano rapporti razionali con μ. Ridotti allo stesso denominatore, i due rapporti siano $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$. Allora, il rettangolo è somma di p·q quadratini di lato $\frac{1}{n}\mu$. Pertanto, l'area del rettangolo è $\left(\frac{p\cdot q}{n^2}\right)\mu^2 = (b\cdot h)\mu^2$.

Infine, se almeno uno tra b ed h è irrazionale, si può ricorrere all'insieme dei rettangoli AEGF, con AE incluso in AB e AF incluso in AC, ed i lati con rapporto razionale: l'insieme delle loro aree razionali, ciascuna prodotto delle misure dei loro lati, ha estremo superiore, e *questo si può definire area del rettangolo ABDC*.



La misura b è estremo superiore delle misure dei segmenti AE; analogamente, h è estremo superiore delle misure dei segmenti AF. A questo punto, il prodotto $b\cdot h$ di questi rapporti è un maggiorante dell'area del rettangolo ABDC. D'altra parte, si possono considerare i segmenti AH contenenti AB e con misura razionale, e quelli, AI contenenti AC, con misura razionale. Allora il rettangolo AHJI contiene ABDC, ha area razionale, maggiore di $(b\cdot h)\mu^2$. L'insieme di queste aree razionali è contiguo a quello delle aree razionali dei rettangoli AEGF. Infatti, posto p = b+h, per ogni paio di numeri positivi ε e t esistono due segmenti AE, AH, con AE < AB < AH di lunghezze razionali r_1, r_2 tali che $r_2 = r_1 + \frac{t}{p}$ e due segmenti AF < AC < AI, di lunghezze razionali s_1, s_2 tali che $s_2 = s_1 + \frac{t}{p}$. Allora $r_2 s_2 = \left(r_1 + \frac{t}{p}\right)\left(s_1 + \frac{t}{p}\right) = r_1 s_1 + \frac{t}{p}(r_1 + s_1) + \left(\frac{t}{p}\right)^2$.

Ne segue: $r_2 s_2 - r_1 s_1 = \frac{t}{p}(r_1 + s_1) + \frac{t^2}{p^2} < \frac{t}{p}p + \frac{t^2}{p^2} = t + \frac{t^2}{p^2} < \varepsilon \Leftrightarrow$

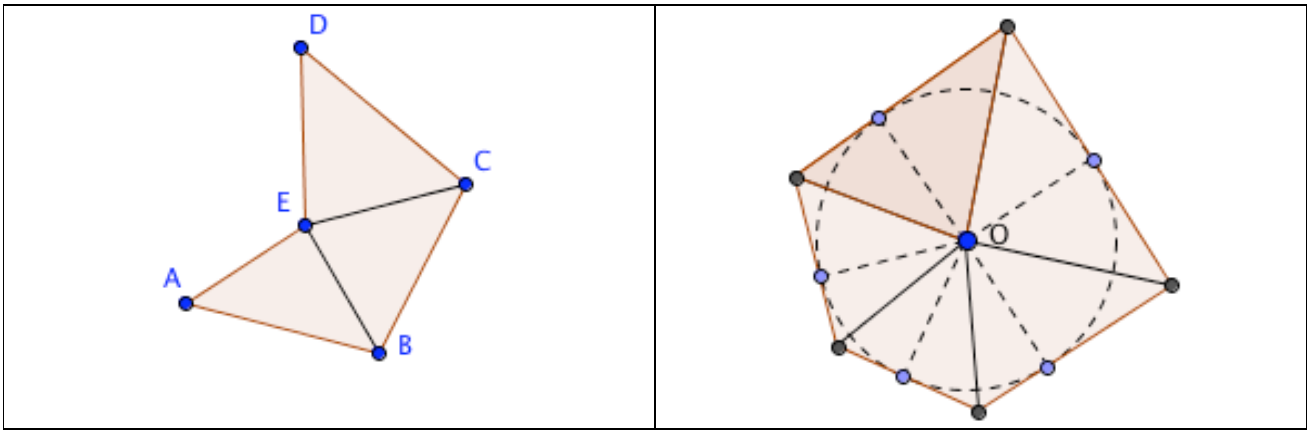
$\Leftrightarrow t^2 + p^2 t - p^2\varepsilon < 0 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{p\left(\sqrt{p^2 + 4\varepsilon} - p\right)}{2}$, e questo ovviamente è possibile.

Dunque, l'elemento separatore è unico, ossia l'area del rettangolo coincide con $(b\cdot h)\mu^2$.

In particolare, dunque, l'area di un rettangolo è il prodotto delle misure dei due lati, quindi, come tutti i ragazzi sanno, area = base per altezza.
Ne segue che l'area di un quadrato è il quadrato della misura del suo lato.

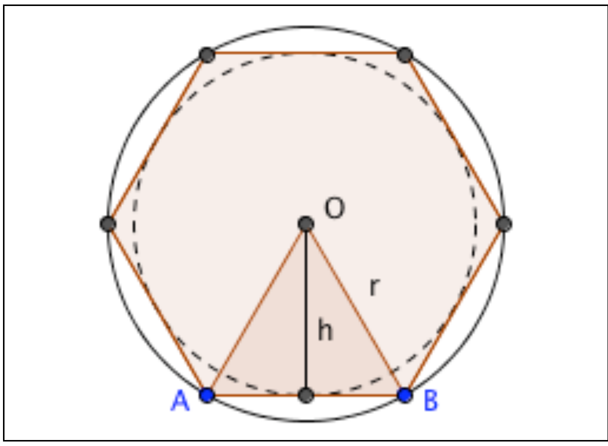
La teoria dell'equivalenza ci consente di ricavare le consuete formule:

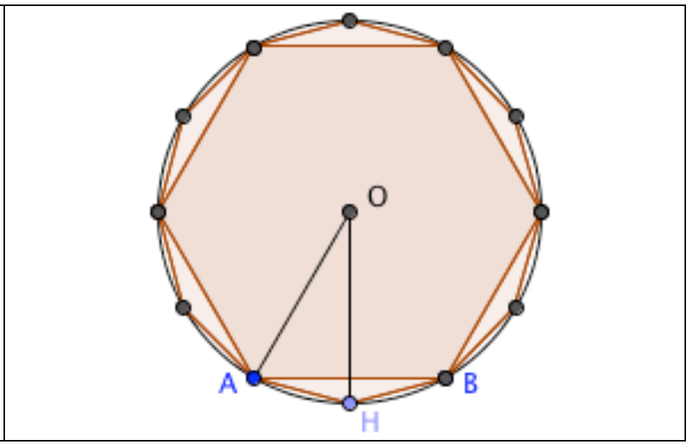
- parallelogramma: base per altezza
- triangolo: metà del prodotto base per altezza
- trapezio: metà della somma delle basi per altezza
- poligono: si cerca di trasformarlo in somma di triangoli.
- poligono circoscrittibile: metà del prodotto di perimetro (somma dei lati) per *apotema* (cioè raggio del cerchio inscritto).



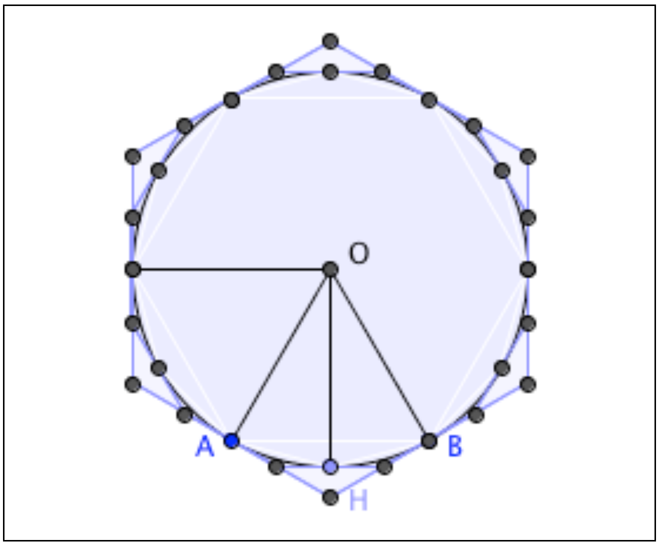
Formula di Erone. Una situazione frequente è il conoscere i lati di un triangolo e doverne calcolare l'area. A questo problema risponde la formula di Erone, che fa a meno dell'altezza relativa ad un lato, ma usa solo la metà del perimetro. Detti a, b, c le misure dei tre lati e $p = \frac{a+b+c}{2}$ il *semiperimetro*, la formula afferma che il triangolo ha area data dalla formula: $\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$.

Poligoni regolari. Un poligono regolare con n lati è individuato dal suo lato. L'angolo al centro è un n-esimo dell'angolo giro. Pertanto, deve esistere una relazione tra il lato, l'apotema ed il raggio del cerchio circoscritto. Detti ℓ il lato, h l'apotema ed r il raggio, dal teorema di Pitagora segue $r^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2$. Ma questa relazione non basta, perché le incognite sono due: r ed h, se conosciamo il lato, oppure il lato e l'apotema, se conosciamo il raggio r. Comunque, se raddoppiamo il numero dei lati, tracciandone gli assi, il perimetro aumenta, perché al posto di un lato AB c'è la somma AH+HB. Aumenta anche l'area, perché si aggiunge per ogni lato AB l'area del triangolino ABH.





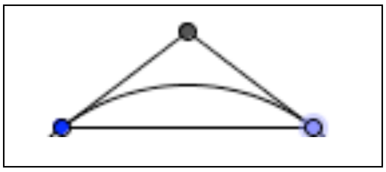
Ne segue che se si considerano perimetri ed aree di poligoni regolari inscritti ottenuti per esempio da un esagono regolare raddoppiando ricorsivamente col metodo descritto il numero dei lati, otteniamo un insieme di numeri separato da quello degli analoghi poligoni circoscritti, perché questi hanno per ogni lato un triangolino in più rispetto all'analogo poligono inscritto. Per questi ultimi, al raddoppiare del numero dei lati area e poligono diminuiscono.



Ne segue che abbiamo due coppie di insiemi separati, quello dei perimetri e quello delle aree dei poligoni inscritti e circoscritti ottenuti dall'esagono raddoppiandone ricorsivamente il numero dei lati come descritto tracciando ogni volta gli assi dei lati. Se sono contigui, abbiamo un solo elemento di separazione in ciascuno dei due casi, rispettivamente presi come lunghezza della circonferenza e area del cerchio.

Ora, poiché ogni poligono inscritto è incluso nel cerchio, la sua area è minore di quella del cerchio; viceversa, ogni poligono circoscritto ha area maggiore del cerchio. Pertanto, l'area del cerchio separa l'insieme delle aree dei poligoni inscritti da quello delle aree dei poligoni circoscritti.

Varrà anche per i perimetri? È immediato se si ammette che il *minimo percorso* tra due punti A e B è il segmento AB. Ma che cosa significa il minimo percorso?



Come si dimostra che i due insiemi di poligoni e i due insiemi dei loro perimetri sono contigui? La dimostrazione è comunque abbastanza complessa.

SIMILITUDINE . La similitudine è definibile per postulati come la congruenza e l'equiestensione. Si può richiedere la seguente lista di proprietà:

- è una relazione d'equivalenza
- figure congruenti sono simili
- congruenza e similitudine coincidono per punti, rette, semirette, semipiani, angoli.
- tutti i segmenti sono simili
- due poligoni sono simili se e solo se hanno lo stesso numero di lati ed esiste una biiezione tra gli insiemi dei loro vertici tale che angoli corrispondenti sono congruenti e lati corrispondenti hanno rapporto costante.

Al solito, chissà se bastano!

Comunque, due poligoni regolari sono simili se e solo se hanno lo stesso numero di lati.

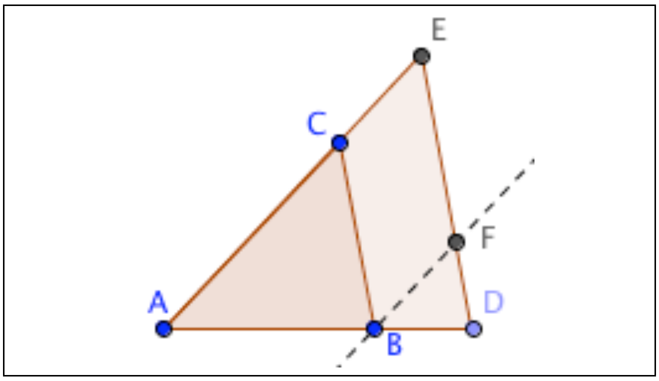
Vediamo che cosa succede per i triangoli:

I criterio di similitudine: se due triangoli hanno gli stessi angoli, sono simili

II criterio di similitudine: se due triangoli hanno due coppie di lati direttamente proporzionali e i due angoli compresi congruenti, sono simili.

III criterio di similitudine: se due triangoli hanno i lati direttamente proporzionali sono simili.

Dimostrazione del primo criterio. Poiché gli angoli di vertice A sono congruenti, possiamo sovrapporne i lati. La congruenza degli angoli di vertici B e D rende paralleli i terzi lati BC e DE, quindi per il teorema di Talete segue AB:AD = AC:AE.



Condotta ora per B la parallela BF ad AC, ne segue che BFEC è un parallelogramma, quindi BC = EF.

Allora AB:AD = EF:ED = BC:ED.

Dunque, in definitiva BC:ED = AB:AD = AC:AE.

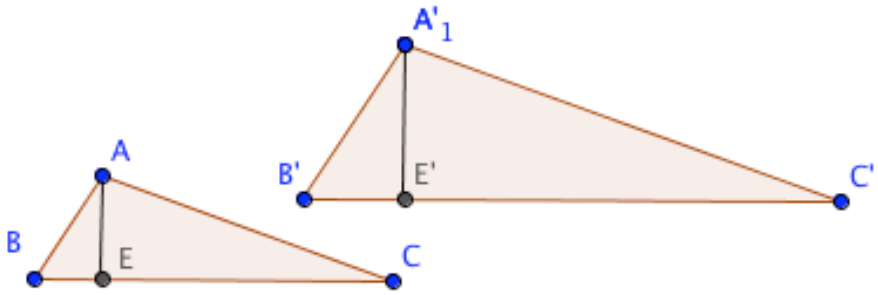
Dimostrazione del secondo criterio: Se due triangoli sono simili, possiamo sovrapporre due angoli congruenti, per esempio di vertice A, ed allora i lati BC e DE sono paralleli: ne viene che per il teorema di Talete vale la proporzione AB:AD = AC:AE. Allora, inversamente, se vale quella proporzione, la parallela a BC per D deve passare per E, perché altrimenti si andrebbe contro il teorema di Talete. Ne segue che gli angoli $A\hat{D}E$ ed $A\hat{B}C$ sono congruenti, perché corrispondenti di due parallele rispetto alla trasversale AD. Analogamente, $A\hat{C}B = A\hat{E}D$. Manca solo di dimostrare che anche il rapporto fra BC e DE è lo stesso. Per questo, come sopra basta tracciare la parallela da B ad AC, osservare che CBFE è un parallelogramma e concludere che AB:AD = EF:ED = BC:ED.

Il terzo si dimostra per assurdo usando le proprietà dei triangoli: se si tengono fissi due lati e si varia l'angolo compreso, il terzo lato varia nello stesso modo, quindi la proporzionalità coi lati dell'altro triangolo non si mantiene.

NOTA. Per il primo criterio in realtà bastano due angoli, perché il terzo è determinato dalla somma degli angoli interni uguale ad un angolo piatto. In particolare, per la similitudine di triangoli rettangoli basta la congruenza di uno degli angoli acuti.

Allora, possiamo dedurre il seguente risultato: se due poligoni sono simili, detto k il rapporto fra i lati corrispondenti, il rapporto fra le aree è k^2.

Dimostrazione.



Si tracci l'altezza relativa al lato maggiore. Coi simboli della figura, i triangoli rettangoli ABE e A'B'E' sono rettangoli e con angoli acuti congruenti di vertici B e B'. Allora sono simili, quindi si ha k = AB:A'B' = AE:A'E'.

Ne viene che l'area del secondo triangolo è $\frac{1}{2}\overline{B'C'}\cdot\overline{A'E'} = k^2\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AE}\right)$.

Per induzione sul numero dei lati, possiamo supporre vero il risultato per n-1 ≥ 3 lati e dimostrarlo per n lati. Presi due poligoni simili con rapporto k tra lati corrispondenti, preso nel primo poligono un vertice con un angolo convesso formato dai due lati consecutivi AB e BC, ed il corrispondente di vertice B' nell'altro poligono, i triangoli ABC ed A'B'C' sono simili per il I criterio, quindi hanno aree di rapporto k^2.

I restanti poligoni, con n-1 lati, sono ancora simili perché anche AC:A'C' = k e gli angoli corrispondenti sono ancora congruenti. Ne segue che per ipotesi induttiva anche le loro aree hanno rapporto k^2.

Le aree dei poligoni dati sono ciascuna la somma dell'area del triangolo e del restante poligono, quindi un raccoglimento a fattor comune permette di concludere.

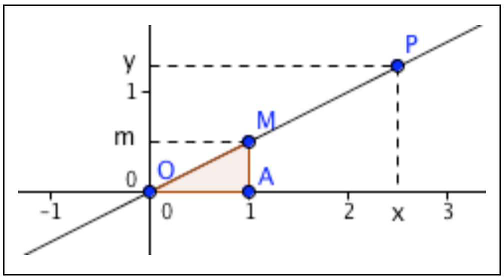
Mediante la similitudine fra i triangoli rettangoli ABC, ABE, AEC, si ricavano nuovamente i due teoremi di Euclide già visti nella sezione dell'equivalenza:

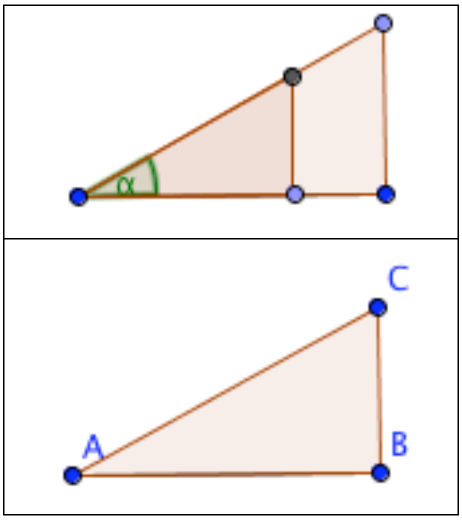
I teorema di Euclide: in ogni triangolo rettangolo ABC, con Â retto il cateto AB è *medio proporzionale* fra l'ipotenusa BC e la sua proiezione BE sull'ipotenusa: BC:AB = AB:BE.

II teorema di Euclide: in ogni triangolo rettangolo, l'altezza AE relativa all'ipotenusa BC è *medio proporzionale* fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: BE:AE = AE:CE.

NOTE. A) Il teorema di Talete e le sue conseguenze sui criteri di similitudine dei triangoli forniscono nella Geometria Analitica lo strumento per ricavare l'equazione di una retta non parallela agli assi cartesiani.

Questo argomento in genere viene ignorato nei testi scolastici, nei quali spesso si preferisce partire da una equazione di primo grado y = mx, sostituire dei valori alla x e ricavare i valori di y corrispondenti e far “osservare” agli allievi che i punti ottenuti (x, y) sono “allineati”.





B) Nella figura qui accanto troviamo due triangoli rettangoli con un angolo acuto in comune, quindi simili. Allora i lati sono direttamente proporzionali.

Il rapporto fra i cateti o fra i cateti e l’ipotenusa dipende solo dall’angolo α e non dalle misure dei lati.

Poniamo allora: $$\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{AB}{AC} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{BC}{AC} \\ \tan(\alpha) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

La parte della Geometria che si occupa di questi rapporti si chiama *Trigonometria*.

Inoltre, l’Analisi Matematica costruisce le *funzioni numeriche periodiche seno, coseno e tangente*, ne studia le proprietà e ne determina le inverse parziali.

CIRCONFERENZA E CERCHIO La similitudine fra poligoni regolari con lo stesso numero di lati porta ad una conseguenza interessante: siano date due circonferenze di diametri d e d’, e consideriamo per esempio due esagoni regolari inscritti in esse: i diametri sono diagonali che congiungono vertici opposti.

Allora, il rapporto fra i lati è lo stesso fra i diametri e fra i perimetri.

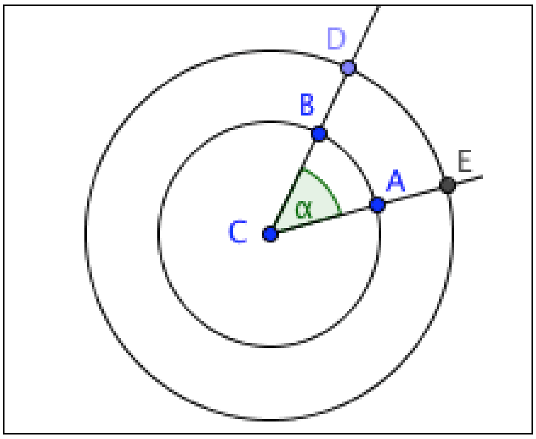
Se ora consideriamo per ogni $n \geq 0$ i poligoni inscritti con $6 \cdot 2^{n+1}$ lati tracciando gli assi dei lati del poligono con $6 \cdot 2^{n}$ lati, il rapporto fra i diametri resta uguale a quello fra i perimetri. Dette c e c’ le misure delle circonferenze, ottenute come estremi superiori dei perimetri, allora il rapporto fra di esse resta lo stesso che c’è fra i diametri; ossia si ha $c : c' = d : d'$. Permutando i medi si ottiene c:d = c’:d’.

Questo rapporto c:d, quindi, è costante per ogni circonferenza. Fu denotato con la lettera greca π e fu approssimato da Archimede con 22/7, ma in realtà è un po’ inferiore: 3,14159.... Si sa che non è razionale e oggi se ne conoscono miliardi di cifre decimali.

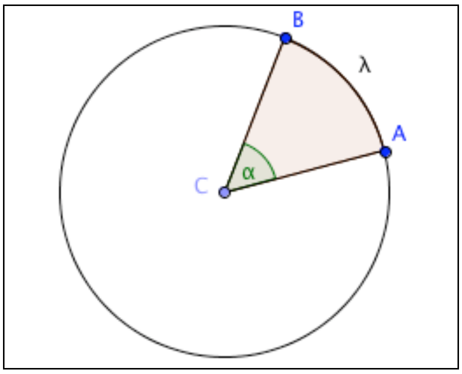
Si ha quindi $c = \pi d = 2\pi r$, se r indica il raggio.

Ora consideriamo i poligoni circoscritti, per i quali il raggio è l'apotema: le loro aree sono date da metà del perimetro per l'apotema, ossia metà del perimetro per il raggio.
L'area del cerchio è l'estremo inferiore delle aree dei poligoni circoscritti.
L'estremo inferiore del perimetro è la circonferenza c, pertanto si deduce che l'area C del cerchio è metà del prodotto della circonferenza per il raggio, ossia $C = \frac{c \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$.
Questa formula molto semplice mostra la stessa costante π vista per la circonferenza.

$\boxed{\text{RADIANTI}}$. Se consideriamo la parte di circonferenza ottenuta intersecandola con un angolo al centro, otteniamo un *arco*.
Anche per un arco si può parlare di lunghezza, ottenuta moltiplicando la lunghezza della circonferenza per il rapporto fra angolo al centro ed angolo giro.
Nulla vieta allora di considerare un arco lungo quanto il raggio.
L'angolo al centro corrispondente è detto *radiante* e denotato con rad.



Se consideriamo circonferenze concentriche, con lo stesso angolo al centro, la proporzione diretta fra circonferenze e raggi fa sì che allo stesso angolo al centro corrisponda lo stesso rapporto fra arco e raggio.
Questo rapporto è la misura dell'angolo, se al posto del grado mesopotamico si assume il radiante come unità di misura degli angoli.
Allora l'angolo piatto misura π rad, l'angolo giro 2π rad e l'angolo retto π/2 rad.
Inoltre, l'angolo al centro di un poligono regolare con n lati inscritto in una circonferenza misura 2π/n rad.



Settori circolari. La proporzionalità diretta fra angoli al centro, archi e settori circolari implica

cerchio: settore[C,AB] = 2π:α

Allora, poiché $\alpha = \lambda/r$ rad ed il cerchio misura πr^2, ne segue che il settore[C,AB] ha area $\frac{r \cdot \lambda}{2} = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2}$.

Sezione 6. – La soluzione di Hilbert.

Nei capitoli precedenti abbiamo esplorato soprattutto la Geometria del piano euclideo, tralasciando la geometria dello spazio, a cui sono stati riservati solo tre seminari.

A fine '800 però, come già detto, si preferì per un certo tempo unire le due trattazioni, e comunque, come già aveva proceduto Euclide, fornire un unico sistema assiomatico, che consentisse di ricostruire tutta la Geometria del piano e dello spazio.

Qui nel seguito riporto l'impostazione di Hilbert, inserita nel suo trattato del 1899[*].

Segnalo tuttavia che Enriques avrebbe preferito trattare la congruenza mediante opportuni assiomi sul gruppo delle isometrie, anche se poi nel suo testo, scritto insieme ad Amaldi, per i licei, segue un'impostazione più vicina a quella di Hilbert.

I **concetti primitivi** sono sei, distribuiti fra oggetti e relazioni

Sono dati tre insiemi di **oggetti**, detti *punti, rette e piani*.

Sono date anche tre **relazioni**:

- *Incidenza* tra punti e rette, tra punti e piani o tra rette e piani;
- *Stare fra*: relazione fra terne di punti.
- *Congruenza*, indicata con il simbolo "≡".

NOTA. Per capirci, il *segmento* fra due punti A e B sarà definito come l'insieme dei punti della retta AB, che *stanno fra* A e B (inclusi A e B)

Non è precisato in quale insieme o fra quali insiemi sia definita la relazione di congruenza.

Nella formulazione dei postulati adopererò anche parole di uso corrente in Geometria, come "individuare" per intendere l'unicità, o "contenuto in", "appartenente a", al posto di "incidente a", e così via.

Per comodità e consuetudine diremo che alcuni punti sono *allineati* se sono tutti incidenti ad una stessa retta, *complanari* se sono incidenti ad uno stesso piano.

Come di consueto, i punti sono denotati con lettere latine maiuscole, le rette con lettere minuscole e i piani con lettere greche minuscole. Non c'è un simbolo per la relazione "stare fra", e neppure per l'incidenza.

[*] Questa trattazione degli assiomi è tratta liberamente da Wikipedia, quindi con tutti i dubbi del caso.

I **postulati** sono distribuiti in cinque liste: *di collegamento, di ordinamento, di congruenza, delle parallele e di continuità*. Li ho numerati qui in ordine progressivo, per mostrare quanti sono.

I. Assiomi di collegamento (o di incidenza)

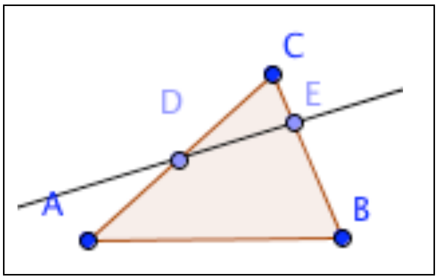
1. Due punti distinti dello spazio sono incidenti ad una retta.
2. Due punti distinti incidenti ad una retta individuano tale retta.
3. Tre punti non allineati dello spazio individuano un piano.
4. Ogni terna di punti non allineati di un piano individua tale piano.
5. Se due punti di una retta appartengono ad un piano, tutti i punti della retta appartengono a quel piano.
6. Se due piani hanno un punto incidente ad entrambi, hanno almeno un altro punto in comune.
7. Ogni retta contiene almeno due punti, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati
8. Esistono almeno quattro punti non complanari.

NOTA. I primi due dicono che per due punti distinti “passa” una ed una sola retta. Il terzo ed il quarto dicono che tre punti non allineati “giacciono” su un piano ed uno solo. Sono però separati l’esistenza e l’unicità. Invece, l’assioma 7 unisce un’affermazione sulle rette ed una sui piani, che potrebbero essere distinte. L’assioma 6 esclude una Geometria di dimensione maggiore di 3, in cui esistono piani con un solo punto comune o addirittura “sghembi”.
Notiamo infine che questi assiomi valgono anche per punti, rette e piani costruiti su un campo finito.

II. Assiomi di ordinamento

9. Se un punto A sta tra B e C, A sta anche tra C e B, ed i tre punti sono allineati.
10. Dati due punti distinti A e B, esistono un terzo e un quarto punto C e D sulla retta contenente A e B, tali che A sta tra C e B e B sta tra A e D
11. Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è uno ed uno solo che sta tra gli altri due

12. **Assioma di Pasch**: siano dati tre punti A, B e C non allineati, contenuti in un piano π, ed una retta r contenuta in π non passante per i punti A, B, C: se r contiene un punto del segmento AB, allora contiene anche un punto di uno dei due segmenti AC e BC.

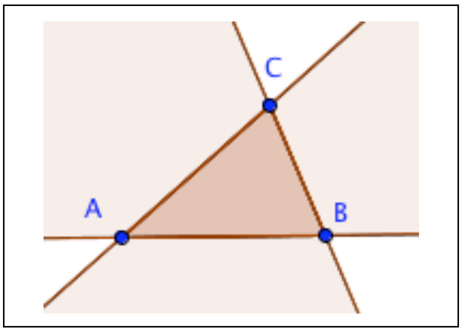


Nota. Da questi assiomi seguono l'ordinamento della retta, la definizione di segmento AB, la coincidenza di AB con BA, e la definizione di semiretta di origine A. Quest'ultima si può ottenere prendendo oltre ad A un altro punto B: la semiretta contenente B è formata dai punti del segmento AB e dai punti D tali che B sta fra A e D. Poiché esiste anche un punto C tale che A sta fra C e B, si può partire da A e C per definire l'altra semiretta. La notazione usata per la semiretta di origine A e contenente B è AB. Dall'assioma 10 si ricava l'infinità dei punti di una retta, ossia almeno la numerabilità. Dall'assioma 12 segue la densità dell'ordine su una retta. Però, tutto quanto esposto finora vale anche per la geometria costruita sui razionali.

Non è inoltre immediato stabilire che cosa sia un angolo. Si potrebbe ipotizzare che siano date due semirette con la stessa origine A, ma non sulla stessa retta; per ogni punto P sulla prima e Q sulla seconda, si consideri il segmento PQ: l'angolo (convesso) potrebbe essere definito come l'insieme dei punti di tutti questi segmenti PQ, ma non ne sono certo. D'altra parte, il prossimo pacchetto di assiomi usa il termine *angolo*.

L'assioma di Pasch parla sostanzialmente di *triangoli*: se una retta interseca un lato del triangolo ABC, anche se il punto intersezione non è un vertice, comunque interseca uno degli altri due lati.

La parola triangolo però qui non è usata. Viene invece usata nel prossimo pacchetto di assiomi. Che cosa sia un triangolo ABC posso solo ipotizzarlo: non è semplicemente la terna dei lati, ma forse anche per Hilbert è l'insieme dei punti comuni ai tre angoli determinati dalle semirette di origine i vertici A, B, C e contenenti i lati.



III. Assiomi di congruenza

13. Se A, B sono due punti di una retta a ed inoltre A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B', su una prefissata semiretta di a' di origine A', tale che il segmento AB sia congruente al (o coincidente col) segmento A'B'. In simboli: AB ≡ A'B'.

14. La relazione di congruenza tra segmenti è transitiva, cioè se A′B′ e A″B″ sono congruenti ad AB, allora A′B′ ≡ A″B″.

15. Siano AB e BC segmenti su una retta r privi di punti interni comuni, (ossia *adiacenti*) e siano A′B′ e B′C′ segmenti su una retta r′ anch'essi adiacenti. Se AB ≡ A′B′ e BC ≡ B′C′, allora AC ≡ A′C′.

16. Sia ABC un angolo e B'C' una semiretta, esistono e sono uniche due semirette B'D e B'E, tali che l'angolo DB'C' è congruente all'angolo ABC e l'angolo EB'C' è congruente all'angolo ABC.

17. La relazione di congruenza tra angoli è transitiva, cioè se A′B′C′ e A″B″C″ sono congruenti ad ABC, allora A′B′C′ ≡ A″B″C″.

18. Se per due triangoli ABC e A′B′C′ si ha AB ≡ A′B′, AC ≡ A′C′, e l'angolo BAC è congruente all'angolo B′A′C′, allora tutto il triangolo ABC è congruente al triangolo A′B′C′.

NOTA. L'assioma 13 è quello del trasporto di segmenti, e il 16 quello degli angoli. Gli assiomi 13 e 14 affermano che per i segmenti la congruenza è una relazione d'equivalenza. L'assioma 15 è la compatibilità tra somma di segmenti e congruenza. Gli assiomi 16 e 17 implicano la riflessività e transitività della congruenza degli angoli, mentre la simmetria forse si deduce. L'assioma 18 è il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Notiamo di nuovo che la congruenza non è postulata in partenza come una relazione (d'equivalenza) in qualche insieme. Non ci sono neppure assiomi che stabiliscano la congruenza di rette, o di piani o di altri insiemi di punti o di rette.

IV. Assioma delle parallele

19. **Assioma di Playfair:** Dati una retta r, un punto A non in r, ed un piano π contenente entrambi, esiste al più una retta in π contenente A e non contenente nessun punto di r.

NOTA. Due rette complanari senza punti comuni sono dette *parallele*. La formulazione del postulato è quella oggi più comune. Nella Geometria Euclidea l'esistenza di almeno una retta per A parallela ad r può essere dimostrata, come visto nel corso, e quindi non è necessaria. Anche se in una Geometria Ellittica le rette parallele non esistono, il postulato rimane corretto grazie alla sua formulazione. In una Geometria Iperbolica, invece, questo postulato non vale: ci sono infinite parallele per A ad una retta non passante per A, e due rette parallele limite, (una specie di *asintoti*) che separano le rette incidenti da quelle parallele.

V. Assiomi di continuità

20. (**Assioma di Archimede**). Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, allora esiste sulla retta contenente AB una famiglia di punti $A_0 = A, A_1, \dots, A_n$ tali che i segmenti A_iA_{i+1}, $0 \le i < n$, sono congruenti a CD e tali che B giace tra A e A_n.

21. (**Assioma di completezza**). Ad un sistema di punti, rette e piani è impossibile aggiungere altri elementi geometrici in modo che il sistema così generalizzato formi una nuova geometria obbediente a tutti i venti assiomi precedenti. In altre parole gli elementi della geometria formano un sistema che non è suscettibile di estensione, ammesso che si considerino validi i venti assiomi del sistema assiomatico di Hilbert.

NOTA. L'assioma di Archimede in questa complicata formulazione non fa uso della definizione di somma di segmenti adiacenti e di multiplo intero di un segmento, ma per il resto è lo stesso che conosciamo. Nel corso è diventato un teorema, avendo scelto come postulato la continuità secondo Dedekind per l'ordinamento dei punti sulla retta.
La completezza qui postulata al n. 21 non è quella presentata nel corso, equivalente alla continuità della retta e concernente l'esistenza dell'estremo superiore di ogni insieme di segmenti superiormente limitato. Non è neppure l'unica formulazione che ho trovato su testi diversi.
Probabilmente tra le ragioni di questo assioma, oltre alle conseguenze interne alla teoria, c'è la preoccupazione di rendere unica la geometria così costruita, nel senso che ogni altra terna di oggetti e terna di relazioni soddisfacenti questo sistema assiomatico produce una geometria *isomorfa* (in qualche senso) a questa. La stessa preoccupazione ha guidato Peano a scegliere i suoi assiomi sui numeri naturali, o Hilbert a scegliere gli assiomi per il campo reale.
Tuttavia, non è evidente come da questo assioma segua la continuità della retta e quindi la usuale Geometria dello spazio tridimensionale reale.

NOTA FINALE. Non essendo un cultore di *Critica dei Principii*, non ho provato ad esaminare la teoria di Hilbert, al fine di recuperare le varie richieste che man mano abbiamo avanzato nel corso, in particolare per la Geometria piana: forse si recuperano facilmente o forse no, ma probabilmente non è importante per il loro insegnamento nella scuola secondaria.